



## PATENT ABSTRACTS OF JAPAN

(11) Publication number: 03229363 A

(43) Date of publication of application: 11.10.91

(51) Int. Cl.

G06F 15/347

(21) Application number: 02024000

(22) Date of filing: 02.02.90

(71) Applicant: FUJITSU LTD

(72) Inventor: SHIMOGOORI SHINTARO  
OMURA YUKIKO

(54) PARALLEL SOLVING SYSTEM FOR SPARSE MATRIX

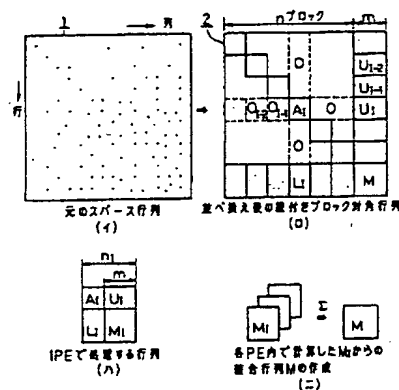
(57) Abstract:

**PURPOSE:** To decrease the communication quantity between PEs and to execute the processing of the whole at a high speed by forming a block diagonal matrix with an edge by rearranging the line and the row of a sparse matrix, and thereafter, transmitting a value obtained by an LU resolution processing without a communication by the PE at every partial matrix to the PE concerned and executing the LU resolution processing of the whole.

**CONSTITUTION:** With regard to a given sparse matrix 1, it is formed to a block diagonal matrix 2 with an edge by rearranging a line and a line, and a row and a row, and thereafter, partial matrixes of a block ( $A_i$ ) and edge blocks ( $L_i$ ,  $U_i$ ) on the diagonal in the block diagonal matrix 2 with an edge are allocated to a PE (processor), respectively. Subsequently, the PE determines the value obtained by an LU resolution processing of the partial matrix in the block with out a communication to the other PE, and transmits it to the PE concerned in a block ( $M$ ) which is influenced by its partial matrix so that the LU resolution processing of the whole can be executed. In such a way, by decreasing the

communication quantity between the PEs, the processing of the whole can be executed at a high speed.

COPYRIGHT: (C)1991,JPO&amp;Japio





⑩ 日本国特許庁(JP)

⑪ 特許出願公開

⑫ 公開特許公報(A) 平3-229363

⑬ Int. Cl.<sup>3</sup>  
G 06 F 15/347

識別記号 庁内整理番号  
P 7056-5B

⑭ 公開 平成3年(1991)10月11日

審査請求 未請求 請求項の数 1 (全6頁)

⑮ 発明の名称 スパース行列の並列求解方式

⑯ 特 願 平2-24000

⑰ 出 願 平2(1990)2月2日

⑱ 発 明 者 下 郡 慎 太 郎 神奈川県川崎市中原区上小田中1015番地 富士通株式会社  
内

⑲ 発 明 者 大 村 由 紀 子 神奈川県川崎市中原区上小田中1015番地 富士通株式会社  
内

⑳ 出 願 人 富士通株式会社 神奈川県川崎市中原区上小田中1015番地

㉑ 代 理 人 弁理士 岡田 守弘

明 細 書

1. 発明の名称

スパース行列の並列求解方式

2. 特許請求の範囲

スパース行列を並列に求解する並列求解方式において、

与えられたスパース行列 $A$ について行・列を並び変えて疎付きブロック対角行列 $\hat{A}$ にした後、当該疎付きブロック対角行列 $\hat{A}$ のうちの対角上のブロック $(A_i)$ および疎ブロック $(L_i, U_i)$ の部分行列を $P_i$ にそれぞれ割り当てて当該 $P_i$ がブロック内の部分行列のLU分解処理した値 $M_i$ を他 $P_i$ と通信なしに求め、これを当該部分行列の影響を受けるブロック $(M)$ 内の該当 $P_i$ に送信して全体のLU分解処理を行うように構成したことを特徴とするスパース行列の並列求解方式。

3. 発明の詳細な説明

【概要】

スパース行列を並列に求解する並列求解方式に関し、

スパース行列の行・列を並び変えて疎付きブロック対角行列にした後、部分行列毎に $P_i$ によって通信なしにLU分解処理した値 $M_i$ を当該 $P_i$ に送信して全体のLU分解処理を行い、 $P_i$ 間の通信量を少なくして全体の処理の高速化を図ることを目的とし、

与えられたスパース行列について行・列を並び変えて疎付きブロック対角行列にした後、当該疎付きブロック対角行列のうちの対角上のブロック $(A_i)$ および疎ブロック $(L_i, U_i)$ の部分行列を $P_i$ にそれぞれ割り当てて当該 $P_i$ がブロック内の部分行列のLU分解処理した値 $M_i$ を他 $P_i$ と通信なしに求め、これを当該部分行列の影響を受けるブロック $(M)$ 内の該当 $P_i$ に送信して全体のLU分解処理を行うように構成する。

【産業上の利用分野】

本発明は、スパース行列を並列に求解する並列求解方式に関するものである。回路シミュレーションなどにおいて、並列計算機による高速化が要求されている。これらシミュレーションは、大規模なスパース行列を数千〜数万回解く必要がある。このスパース行列は連立1次方程式であるため、並列計算機、特に分散メモリによる並列計算機で効率的に求解するのが困難であり、高速に求解することが望まれている。

(従来の技術と発明が解決しようとする課題)

従来、スパース行列の求解の代表的な手法であるLU分解を高速に実行する方式として、第5図に示すように、スパース行列21の全体について各要素の更新回数と参照先を予め調べてテーブル(下三角行列の要素用データ、上三角行列の要素用データ、ビット用データなど)を作成しておき、求解時にこれらのテーブルに従ってデータの送受信・演算を行い、行列の高速求解する方式が提案されている。この第5図方式は、行列求解中

にPE間の同期を取る必要が全くなく、計算を次々実行していくことができるので効率的である。

しかし、第5図方式は、基本的に各要素が別々のPE(プロセッサ)に担当させているため、行列求解の基本処理( $A = A - B * C$ 、あるいは $A = A / B$ 型の計算)毎にPE間に通信を生じ、通信時間により全体の処理低下を招くという問題があった。

本発明は、スパース行列の行・列を並べ替えて縁付きブロック対角行列にした後、部分行列毎にPEによって通信なしにLU分解処理した値M<sub>i</sub>を該当PEに送信して全体のLU分解処理を行い、PE間の通信量を少なくして全体の処理の高速化を図ることを目的としている。

(課題を解決する手段)

第1図は、本発明の原理構成・説明図を示す。

第1図において、スパース行列1は、LU分解処理を行おうとする行列を模式的に表したものである。ここで、黒点が非零要素である。

縁付きブロック対角行列2は、スパース行列1について行と行・列と列を並び替えて、非零要素を点部に集めた行列を模式的に表したものである。

対角上のブロック(A<sub>i</sub>)は、縁付きブロック対角行列2のうちの対角上の任意のブロック(A<sub>i</sub>) (i=1ないしn)であって、PEに割り当てられる部分行列のブロックである。

ブロック(M)は、対角上のブロック(A<sub>i</sub>)の部分行列の影響を受けるブロックである。

(作用)

本発明は、第1図に示すように、与えられたスパース行列1について行と行・列と列を並び替えて縁付きブロック対角行列2にした後、当該縁付きブロック対角行列2のうちの対角上のブロック(A<sub>i</sub>)および縁ブロック(L<sub>i</sub>、U<sub>i</sub>)の部分行列をPEにそれぞれ割り当てて当該PEがブロック内の部分行列のLU分解処理した値M<sub>i</sub>を他PEと通信なしに求め、これを当該部分行列の影響を受けるブロック(M)内の該当PEに送信し

て全体のLU分解処理を行うようにしている。

従って、スパース行列の行・列を並べ替えて縁付きブロック対角行列にした後、部分行列毎にPEによって通信なしにLU分解処理した値M<sub>i</sub>を、該当PEに送信して全体のLU分解処理を行うことにより、PE間の通信量を少なくして全体の処理の高速化を図ることが可能となる。

(実施例)

次に、第1図から第4図を用いて本発明の1実施例の構成および動作を順次詳細に説明する。

第1図(イ)は、元のスパース行列1を示す。これは、LU分解処理をしようとしている行列(疎行列)、即ち連立1次方程式を表す行列を模式的に表したものであって、黒点が非零要素である。

第1図(ロ)は、並び替え後の縁付きブロック対角行列2を示す。これは、第1図(イ)スパース行列2の行と行、および列と列を並び替えて、非零要素を斜線部に集めた行列である。この際、

行・列の並び換えに対応して、第1図(イ)行方向ポイント、列方向ポイントを変更する。

第1図(ハ)は、1PEで処理する行列を示す。これは、第1図(ロ)縫付きブロック対角行列2の対角上の任意のブロック(A<sub>i</sub>) (i=1ないしn)についてLU分解処理する際に必要な部分行列を取り出したものであって、1つのPE内で当該小さく分割した部分行列について、PE間で通信を行うことなくLU分解処理を行い、全体のPE間の通信量を削減したものである。

尚、任意のブロック(A<sub>i</sub>)の部分行列の値U<sub>i</sub>およびL<sub>i</sub>は、下式(Ⅲ)、(Ⅳ)で求められる。

$$U_i = U_i - 0_{i,1} \times U_{1,1} - 0_{i,2} \times U_{2,1} \\ \text{— (以降省略)}$$

$$- U_i \cdot (2 \text{項以降が零のため}) \cdots \cdots \text{Ⅲ} \\ L_i = L_i - 0_{i,1} \times L_{1,1} - L_{i,2} \times L_{2,1} \\ \text{— (以降省略)}$$

— L<sub>i</sub> (2項以降が零のため)  $\cdots \cdots$  Ⅳ  
従って、第1図(ロ)ブロック(A<sub>i</sub>)の部分行列は、結果として第1図(ハ)の部分行列に

これは、第1図(ロ)任意のブロック(A<sub>i</sub>)の部分行列を担当するPEに当該部分行列のデータをそれぞれ渡す。

④は、PE内の右下の行列(結合行列)について、LU分解時の更新回数・送信先を調べる。

⑤は、結合行列求解時の更新回数テーブル・送信先テーブルを作成する(第4図(ロ)の更新回数、送信先テーブルに送信先を予め設定する)。

以上の前処理によって、第1図(ハ)任意のブロック(A<sub>i</sub>)毎の部分行列のLU分解処理を受け持つPEに行列データ、更新回数、送信先などを設定、および第1図(ニ)結合行列の更新回数、送信先などを設定する。

第2図(ロ)において、⑥は、ブロック内のLU分解を実行する。このとき、結合行列に対して所定の処理終了したら、送信先PEに値を送信する。これは、第1図(ハ)で1PEが処理する行列(部分行列)について、式(Ⅲ)によって当該部分行列の値M<sub>i</sub>を求め、これを送信先(影響を受ける予め設定した送信先)のブロック(M)内の値

いて下式(Ⅳ)によってM<sub>i</sub>を求めればよい。

$$M_{i,1} = M_{i,1} - \sum_{k=1}^{n_i-1} L_{i,k} \cdot U_{k,1} \cdots \cdots \text{Ⅳ}$$

ここで、nは対角部分のブロック数を表し、mは縫部分のブロックの素子数を表し、lは1ないしnを表し、n<sub>i</sub>はブロックiの行列次元を表す。

第1図(ニ)は、各PE内で部分行列について計算したM<sub>i</sub>からの結合行列Mの作成を示す。これは、各PE内で計算して送信されてきたM<sub>i</sub>から下式(Ⅴ)によって全体の結合行列Mを求める。

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \cdots \cdots \text{Ⅴ}$$

次に、第2図を用いて第1図構成の動作を説明する。

第2図(イ)において、①は、行列を並び換えて、縫付きブロック対角行列2にする。これは、第1図(イ)元のスパース行列1の行と行、列と列を並び換えて第1図(ロ)縫付きブロック対角行列2に変換する。

②は、各PEに担当すべき行列データを渡す。

当PEに送信する。

③は、結合行列要素を受信したら、更新処理を行う。所定の更新回数分の更新を受けたら送信先PEに送信する。これは、②で結合行列要素(部分行列)のLU分解処理した値M<sub>i</sub>を受信したら式(Ⅳ)によって旧の値を新の値に更新する。所定の更新回数分の更新をしたら、送信先PE(影響を受ける予め設定した送信先PE)に送信する。

次に、第3図を用いて本発明の1実施例構成の具体例を詳細に説明する。

第3図において、①は、ブロックA<sub>i</sub>の部分行列のLU分解処理した値M<sub>i</sub>を求める。これは、左上の縫付きブロック対角行列2の任意のブロックA<sub>i</sub>の部分行列(第3図左下に示す部分行列)のLU分解処理した値M<sub>i</sub>を因式式によって求める(既述した式(Ⅲ)参照)。

②は、①で求めた値M<sub>i</sub>を対応する場所(プロセッサ、PE)に送信する(ブロックM内の当該値M<sub>i</sub>の影響を受けるPEに送信する)。

③は、②で送信を受けたブロックM内のPEが

図示式によって全体のブロックのLU分解処理した値Mを求める(既述した式(4)参照)。この際、全PEで協調処理を、右上の説明図に示すように行う。即ち、④で図中のb(左下の部分行列のL<sub>i</sub>の値)からの送信および図中c(右上の部分行列のU<sub>i</sub>の値)からの送信を受けた該当PEが、先に受信した方を受信バッファに入れ、後から受信した要素と掛けて、旧の値から引く(a-b×c(④の処理を行う))。以上の処理によって部分行列毎のLU分解処理を行う。そして、この結果を他の影響を与える該当PEに送信し、全体のLU分解処理を行う。

第4図は、本発明のデータ構造例を示す。

第4図(イ)は、PE内の部分行列用テーブルを示す。これは、第1図(ハ)1PEで処理する行列の各要素の情報を格納するテーブルである。ここで、第1図(イ)元のスパス行列から第1図(ロ)並べ換えの置付けブロック対角行列2に変換したときに、行方向ポインタ、列方向ポインタを変更する。また、更新回数、送信先などを予め第2図

(イ)④で設定する。

第4図(ロ)は、結合行列用テーブルを示す。これは、第1図(ニ)各PE内で計算したM<sub>i</sub>からの結合行列Mの各要素の情報を格納するテーブルである。更新回数、送信先などは予め第2図(イ)④で設定する。

〔発明の効果〕

以上説明したように、本発明によれば、スパス行列1の行・列を並べ換えて並べ換えブロック対角行列2にした後、部分行列毎にPEに割り当てて他のPEと通信することなくLU分解処理した値M<sub>i</sub>をこれらの影響を受けるブロックM内の該当PEに送信して全体のLU分解処理を行う構成を採用しているため、PE間の通信量を少なくして全体の処理の高速化を図ることができる。

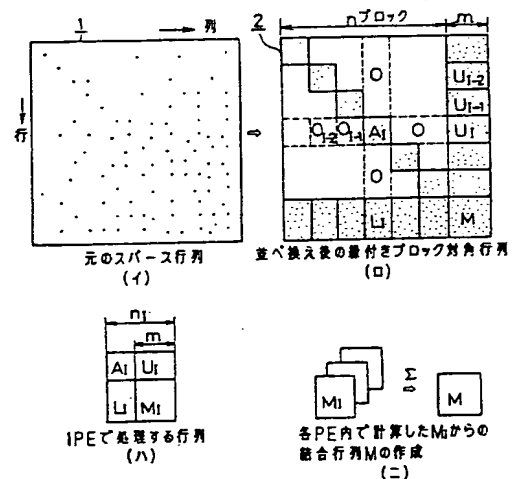
#### 4. 図面の簡単な説明

第1図は本発明の原理構成・説明図、第2図は本発明の動作説明フローチャート、第3図は本発

明の1実施例構成・説明図、第4図は本発明のデータ構造例、第5図は従来の行列求解方式を示す。

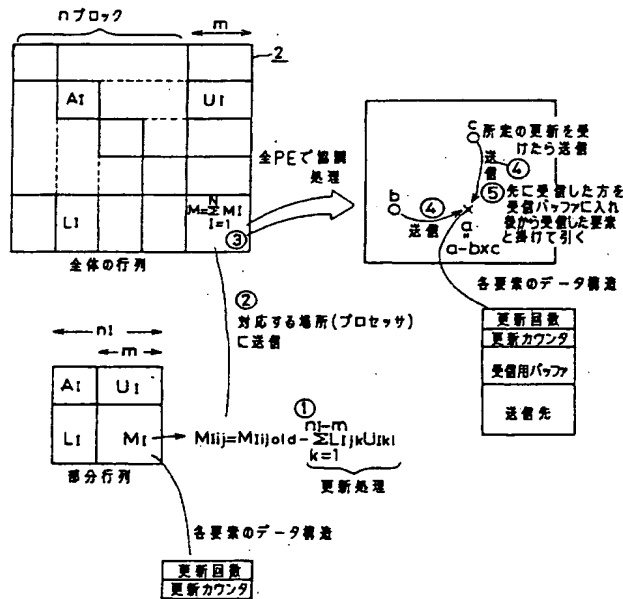
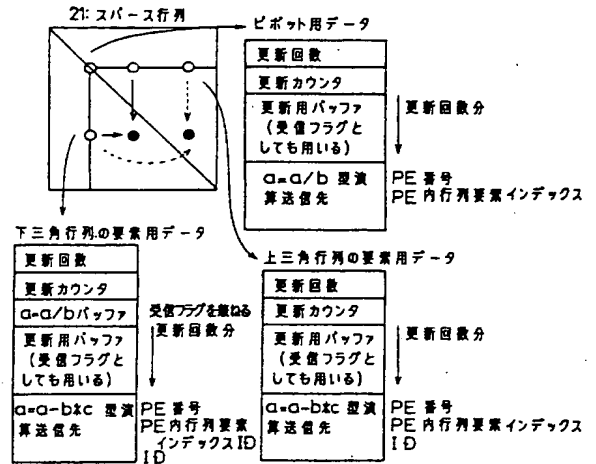
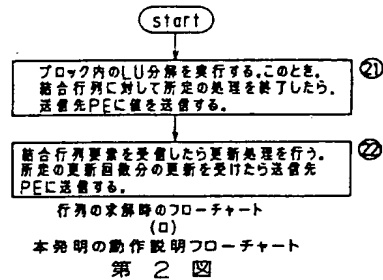
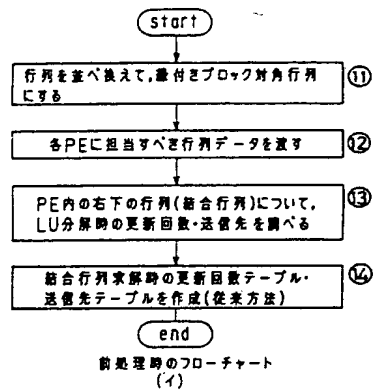
図中、1はスパス行列、2は並べ換えブロック対角行列を表す。

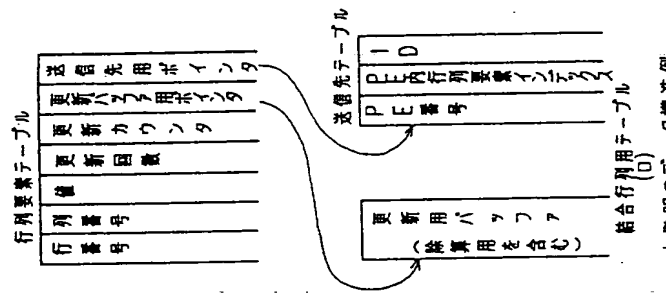
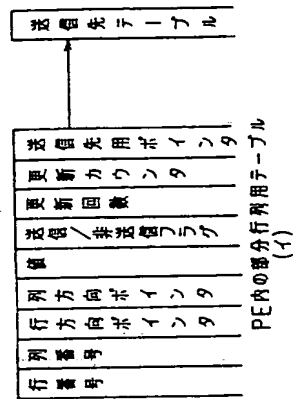
特許出願人 富士通株式会社  
代理人弁理士 岡田 守弘



本発明の原理構成・説明図

第1図





本発明のデータ構造例  
第4図